

سلسلة

سلسلة

الرياضيات من غير تعقيد

الهندسة

وحساب المثلثات

\sqrt{x}

الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول



أ. محمود عزمي

مدرس الرياضيات & Math

المنيا - ملوي

تابعوا حلقات الشرح ع اليوتيوب : رياضيات أون لاين أ. محمود عزمي

حلقات شرح مناهج المرحلة الإعدادية بالفيديو عبر قناتنا على اليوتيوب لا تفوت الفرصة اشترك الآن في القناة



i

YOUTUBE.COM

رياضيات اون لاين أ.محمود عزمي

شرح كامل لمناهج الرياضيات أ.محمود عزمي مؤلف سلسلة نسائم في الري...

القياس الستيني للزاوية

تعالوا نشوف كام فكرة عن النسبة

شوية ملاحظات

- الدرجة (°) = 60 دقيقة (′)
- الدقيقة (′) = 60 ثانية (″)
- لما يقولك أوجد بالقياس الستيني معناه أنه عاوز قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني يعني بعد ماتطلع الناتج على الآلة الحاسبة هتضغط مفتاح

الفكرة الثالثة: مجموع قياسات الزوايا

الداخلية لأي مثلث = 180°
مثال: إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث 3 : 7 : 4 أوجد القياس الستيني لهم.
الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى 3س
وقياس الزاوية الثانية 7س
وقياس الزاوية الثالثة 4س
3س + 7س + 4س = 180°
14س = 180°
س = 180° ÷ 14 = 12.857°

قياس الزاوية الأولى = 3س = 3 × 12.857° = 38.571°

قياس الزاوية الثانية = 7س = 7 × 12.857° = 89.999° = 90°

قياس الزاوية الثالثة = 4س = 4 × 12.857° = 51.428°

قياس الزاوية الثالثة = 4س = 4 × 12.857° = 51.428°

قياس الزاوية الثالثة = 4س = 4 × 12.857° = 51.428°

الفكرة الأولى: مجموع قياسي الزاويتين

المتتامتين = 90°
مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين 2 : 3 أوجد قياس كل منهما.
الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى 2س
وقياس الزاوية الثانية 3س
2س + 3س = 90°
5س = 90°
س = 90° ÷ 5 = 18°

قياس الزاوية الأولى = 2س = 2 × 18° = 36°
قياس الزاوية الثانية = 3س = 3 × 18° = 54°

الفكرة الثانية: مجموع قياسي الزاويتين

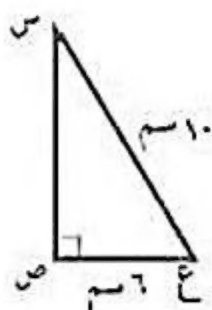
المتكاملتين = 180°
مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين 4 : 6 أوجد قياس كل منهما.
الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى 4س
وقياس الزاوية الثانية 6س
4س + 6س = 180°
10س = 180°
س = 180° ÷ 10 = 18°

قياس الزاوية الأولى = 4س = 4 × 18° = 72°
قياس الزاوية الثانية = 6س = 6 × 18° = 108°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تدريب:



$$\text{جاس} = \frac{\text{ج}}{\text{اس}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{جتاس} = \frac{\text{ج}}{\text{اس}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ظاس} = \frac{\text{ظ}}{\text{اس}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\text{جاص} = \frac{\text{ج}}{\text{ص}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{جتاص} = \frac{\text{ج}}{\text{ص}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

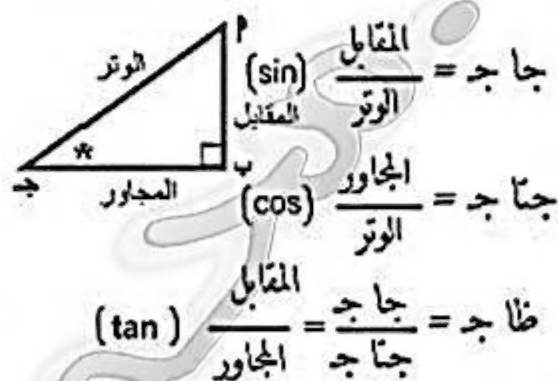
$$\text{ظاص} = \frac{\text{ظ}}{\text{ص}} = \frac{10}{10} = 1$$

مساعدة:

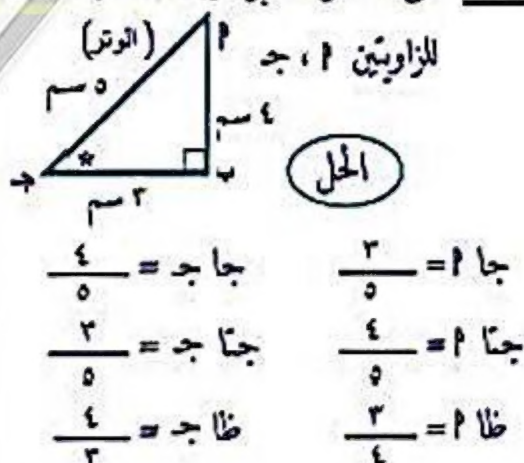
$$\text{س (ص)} = \sqrt{١٠^2 + ٦^2} = \sqrt{١٠٠ + ٣٦} = \sqrt{١٣٦} = ١١.٦٦$$

$$\text{س ص} = ٨ \text{ سم}$$

النسبة المثلثية لزاوية حادة: هي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية الحادة.



مثال ١: في الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين ١، ٢ ج



الفكرة الأولى:

- إذا كان ق (> أ) + ق (> ب) = ٩٠° متتامتان

$$\text{فإن: ج أ} = \text{ج ب}$$

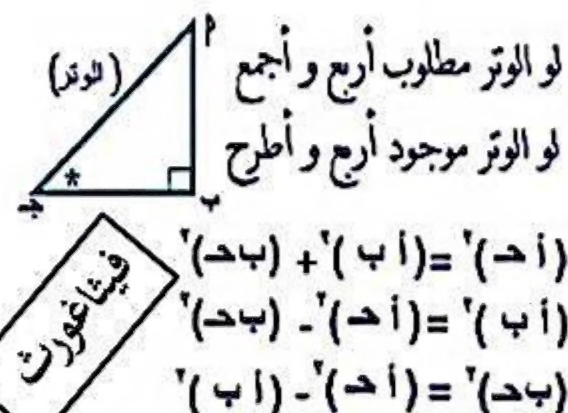
- إذا كانت س، ص زاويتين متتامتين وكانت جاس = ٧، فإن جتاص = ...
- اختر: في المثلث أ ب ج القائم في ب يكون ج أ + جتا ج =

$$\text{ج أ} = \text{ج ب}$$

- اختر: في المثلث أ ب ج القائم في ب يكون ج أ + جتا ج =

$$\text{ج أ} = \text{ج ب}$$

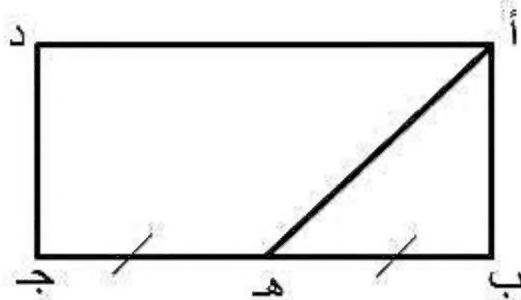
لو الوتر مطلوب أربع وأنجع
لو الوتر موجود أربع وأطرح



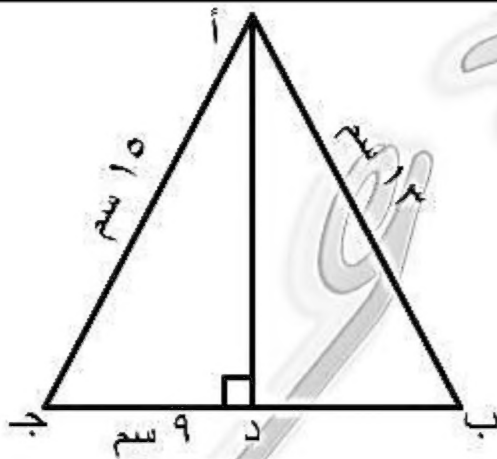
$$\begin{aligned} \text{جاس} &= \sin \\ \text{جتاس} &= \cos \\ \text{ظاس} &= \tan \end{aligned}$$

- تدريب ١: أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٥ سم ، ب ج = ١٢ سم
أوجد : ١. ق (> أ ج ب)
٢. ظا (> أ ج ب) - ظا (> ب أ ج)

- تدريب ٢: أ ب ج د شبه منحرف فيه أ د ب ج ، ق (> ب) = ٩٠ ، أ ب = ٣ سم
أ د = ٦ سم ، ب ج = ١٠ سم ،
برهن أن : جتا (> د ج ب) - ظا (> أ ج ب) = $\frac{1}{3}$



- تدريب ٣: أ ب ج د مستطيل فيه :
أ ب = ٤ سم ، ب ج = ٨ سم
هـ منتصف ب ج
أوجد قيمة ظا (> أ هـ ب) + ظا (> أ ج د)



- تدريب ٤: في الشكل المقابل :
أوجد قيمة ظا ب

- تدريب ٥: أ ب ج د مثلث فيه أ ب = أ ج = ١٠ سم ، ب ج = ١٢ سم

أ د ⊥ ب ج يقطعه في د .
أوجد : ١. جاب + جتا ج
٢. جا ٢ ج + جتا ٢ ج

- تدريب ٦: أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ ج
أوجد النسب المثلثية للزاوية ج .

أمثلة خفيفة

- إذا كان س ، ص زاويتين متتامتين
بحيث س : ص = ١ : ٢ فإن
جا س + جتا ص =
الحل : جا ٣٠ + جتا ٦٠ = ١

- ٢ جتا ٦٠ =
الحل : ١ = ٠,٥ × ٢

- إذا كان جتا ٢ س = ٠,٥ حيث س
زاوية حادة فإن س =
الحل : ٢ س = ٦٠
س = ٣٠

- إذا كان جا ٣ س = $\frac{1}{3}$ حيث س
زاوية حادة فإن س =
الحل : ٣ س = ٣٠
س = ١٠

- إذا كان جا (س + ١٠) = $\frac{1}{3}$
حيث س زاوية حادة فإن س =
الحل : س + ١٠ = ٣٠
س = ٢٠

- إذا كان جتا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ =
حيث س زاوية حادة فإن جا س =

الحل : $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = ٣٠

س = ٦٠
جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال ٢ : ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

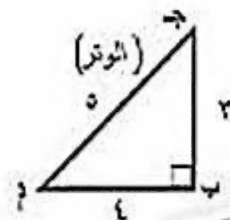
جا ٦ = ٠,٦ أوجد فيه

جا ٦ جتا ج + جتا ٦ جا ج

الحل

$$\text{جا } 6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب ج}} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$



من فيثاغورث

ب ج = ٦ وحدات

∴ جا ٦ جتا ج + جتا ٦ جا ج

$$1 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

النسبة المثلثية للزوايا ٣٠ ، ٦٠ ، ٤٥

قياس الزاوية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

حاجات مهمة

- إذا كان جا ه = جتا ه

فإن ق (> ه) = ٤٥°

- إذا كانت النسبة بين زاويتين متتامتين

هي ١ : ٢ فإن قياسيهما ٣٠ ، ٦٠

- في المثلث القائم طول الضلع المقابل

للزاوية ٣٠° = نصف طول الوتر.

أمثلة متنوعة

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$\text{جا } ٥٠^\circ - \text{ظا } ٦٠^\circ - ٢ \text{ جا } ٦٠^\circ = \text{صفر}$$

$$\text{الحل: } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times 2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \times 2 =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2 - \frac{4}{\sqrt{3}} =$$

$$\text{صفر} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$\text{جتا } ٦٠^\circ = \text{جتا } ٣٠^\circ - \text{جا } ٣٠^\circ$$

$$\text{الحل: الأيمن} = \text{جتا } ٦٠^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{الأيسر} = \text{جتا } ٣٠^\circ - \text{جا } ٣٠^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}$$

- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

$$\text{ظا } ٦٠^\circ - ٢ \text{ جا } ٥٠^\circ + \text{جتا } ٤٥^\circ$$

$$\text{الحل: } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 - 3 =$$

$$2 - 3 = -1$$

- أوجد قيمة س إذا كان:

$$٤س = جتا ٣٠ ظا ٣٠ ٢ ظا ٤٥$$

$$\text{الحل: } ٤س = (\frac{1}{\sqrt{3}}) \times (\frac{\sqrt{3}}{2}) \times ١$$

$$٤س = ١ \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}$$

$$٤س = \frac{1}{2} \dots\dots\dots س = \frac{1}{8}$$

- أوجد قيمة س إذا كان:

$$٢ جاس = ظا ٦٠ - ٢ ظا ٤٥ حيث س زاوية حادة$$

$$٢ جاس = ٢ - (\frac{\sqrt{3}}{2}) \times ٢$$

$$٢ جاس = ٢ - ٣$$

$$٢ جاس = ١$$

$$جاس = \frac{1}{2}$$

$$س = ٣٠$$

- أوجد قيمة ه إذا كان:

$$جا ٤٥ = جتا ه ظا ٣٠ حيث ه زاوية حادة$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}) = جتا ه \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$جتا ه = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots ه = ٣٠$$

البعد بين نقطتين

تطبيقات هندسية

الفكرة الأولى: تحديد نوع المثلث

بالنسبة لأطوال أضلاعه .

فكرة الحل: نحسب أطوال أضلاع المثلث

الثلاثة من قانون البعد وبعدها نحدد نوعه :

مختلف الأضلاع - متساوي الساقين -

متساوي الأضلاع.

مثال: اثبت أن المثلث الذي رؤوسه

النقط أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٢) ، ج (١ ، ٦) متساوي الساقين.

الحل:

$$أب = \sqrt{(٢-٢)^2 + (١-٤)^2} = \sqrt{٠ + ٩} = ٣$$

وحدة طول

$$بج = \sqrt{(٢-١)^2 + (٢-٦)^2} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧}$$

وحدة طول

$$أج = \sqrt{(١-١)^2 + (٦-٢)^2} = \sqrt{٠ + ١٦} = ٤$$

وحدة طول

بمع أن : أب = بج

اذن: المثلث أب ج متساوي الساقين

تدريب:

بين نوع المثلث الذي رؤوسه

أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، ج (١ ، ٣)

بالنسبة لأطوال أضلاعه

ملاحظات هامة

- بعد النقطة (٣ ، ٥) عن محور

الصادات = ٣ وحدات .

- بعد النقطة (٣ ، ٥) عن محور

السينات = ٥ وحدات.

- اذا كانت أ (س ، ص)

، ب (س ، ص)

فإن طول أب

$$= \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^2 + (س_٢ - س_١)^2}$$

مثال ١: اذا كان أ (٢ ، ١) ،

ب (٥ ، ٣) فإن أب = وحدة طول

الحل:

$$أب = \sqrt{(٣-١)^2 + (٥-٢)^2} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$$

$$= \sqrt{(٤-٣)^2 + (١-٢)^2} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$$

$$= \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$$

وحدة طول

مثال ٢: اذا كان بعد النقطة (س ، ٥)

عن النقطة (٦ ، ١) يساوي ٢

وحدة طول أوجد قيمة س

الحل

$$٢ = \sqrt{(١-٥)^2 + (س-٦)^2}$$

$$٢٠ = (س-٦)^2 + ١٦$$

$$(س-٦)^2 = ٢٠ - ١٦ = ٤$$

$$س-٦ = \pm ٢$$

$$س = ٦ \pm ٢$$

$$س = ٨ \text{ أو } س = ٤$$

الفكرة الثانية: اثبات الشكل متوازي أضلاع .

فكرة الحل : نحسب أطوال الأضلاع الأربعة للشكل نجد أن كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول فينتج أن الشكل متوازي أضلاع.

مثال: أ ب ج د شكل رباعي حيث

$$أ (١، ١) ، ب (٥، ٠)$$

$$ج (٥، ٦) ، د (٤، ٢)$$

الحل :

$$أ ب = \sqrt{(٥-١)^2 + (٠-١)^2}$$

$$= \sqrt{١٦} \text{ وحدة طول}$$

$$ب ج = \sqrt{(٥-٥)^2 + (٦-١)^2}$$

$$= \sqrt{٢٥} \text{ وحدة طول}$$

$$ج د = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٢-٦)^2}$$

$$= \sqrt{١٧} \text{ وحدة طول}$$

$$أ د = \sqrt{(٤-١)^2 + (٢-١)^2}$$

$$= \sqrt{٢٥} \text{ وحدة طول}$$

بم أن : أ ب = ج د ، ب ج = أ د

- كل ضلعين متقابلين متساويين في

الطول.

اذن : الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

الفكرة الثالثة: اثبات الشكل أ ب ج د مستطيل.

فكرة الحل : - أولاً: نثبت أن الشكل متوازي أضلاع بنفس الطريقة السابقة.

- ثانياً: نثبت أن القطران أ ج ، ب د

متساويان في الطول باستخدام قانون

البعد. فينتج أن الشكل مستطيل.

الفكرة الرابعة: اثبات الشكل أ ب ج د معين.

فكرة الحل : - نحسب أطوال الأضلاع الأربعة للشكل باستخدام قانون البعد. نجد أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول فيكون الشكل معين .

الفكرة الخامسة: اثبات الشكل أ ب ج د مربع.

فكرة الحل : - أولاً: نثبت أن الشكل

معين بنفس الفكرة السابقة.

- ثانياً: نثبت أن القطران أ ج ، ب د

متساويان في الطول باستخدام قانون

البعد. فيكون الشكل يمثل مربع.

الفكرة السادسة: التعرف على نوع

المثلث بالنسبة لقياسات زواياه.

فكرة الحل : - أولاً: نحسب أطوال

الأضلاع الثلاثة للمثلث باستخدام قانون

البعد.

ثانياً: إذا كان :

$$(أكبر ضلع)^2 = (الضلع)^2 + (الضلع)^2$$

يكون المثلث قائم الزاوية.

- إذا كان :

$$(أكبر ضلع)^2 < (الضلع)^2 + (الضلع)^2$$

يكون المثلث منفرج الزاوية.

- إذا كان :

$$(أكبر ضلع)^2 > (الضلع)^2 + (الضلع)^2$$

يكون المثلث حاد الزوايا.

الفكرة السابعة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، ج تقع على دائرة واحدة مركزها م .
فكرة الحل :

نثبت أن أ م = ب م = ج م = نق
مثال : اثبت أن النقاط أ (٣ ، - ١)
ب (- ٤ ، ٦) ، ج (٢ ، - ٢) تقع
على دائرة مركزها م (- ١ ، ٢) ثم
احسب محيط الدائرة ومساحتها
 $\pi = 3,14$

الحل

$$أ م = \sqrt{(٢ - ١) + (٢ - ٣)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$ب م = \sqrt{(٢ - ٦) + (١ + ٤)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$ج م = \sqrt{(٢ - ٢) + (١ + ٢)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

اذن أ م = ب م = ج م = ٥ = نق
محيط الدائرة = $2\pi \text{ نق}$

$$= 2 \times 3,14 \times ٥ = ٣١,٤ \text{ وحدة طول}$$

مساحة الدائرة = $\pi \text{ نق}^2$

$$= 3,14 \times ٥ \times ٥$$

$$= ٧٨,٥ \text{ وحدة مربعة}$$

الفكرة الثامنة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة.
فكرة الحل:- نحسب أطوال أ ب ،

ب ج ، أ ج .

إذا كان مجموع أصغر جزأين يساوي
الجزء الأكبر تكون النقاط أ ، ب ، ج
على استقامة واحدة.

تدريب: اثبات أن النقاط أ (٣ ، ٥)
ب (٥ ، ٧) ، ج (٠ ، ٢) تقع
على استقامة واحدة.

تدريب: اثبت أن المثلث أ ب ج قائم
الزاوية ثم أوجد مساحته حيث
أ (٣ ، ٢) ، ب (- ٤ ، ١)
ج (٢ ، - ١)

مساعدة : مساحة المثلث القائم =
نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة .

ملحوظة : بعد النقطة (س ، ص) عن

$$\text{نقطة الأصل} = \sqrt{س^2 + ص^2}$$

تدريب: اثبت أن النقاط أ (- ١ ، ٣)
ب (٥ ، ١) ، ج (٦ ، ٤)
د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل ثم
أوجد مساحته .

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٣ ، ٢)
ب (- ٤ ، ٣) ، ج (- ١ ، ٢)
د (٢ ، - ٣) هي رؤوس معين ثم أوجد
مساحته .

مساعدة: مساحة المعين
= نصف حاصل ضرب طولاه قطريه .

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٢ ، ٤)
ب (- ٣ ، ٠) ، ج (- ٧ ، ٥)
د (- ٢ ، ٩) هي رؤوس مربع ثم أوجد
مساحته .

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة

مثال ٣: اذا كانت النقطة (٣ ، ١) هي منتصف البعد بين النقطتين (١ ، ص) ، (س ، ٣) . أوجد قيمتي س ، ص.

الحل

$$(١ ، ٣) = \left(\frac{٣+ص}{٢} ، \frac{س+١}{٢} \right)$$

$$١ = \frac{٣+ص}{٢} \quad ٣ = \frac{س+١}{٢}$$

$$\begin{array}{l|l} ١ \times ٢ = ٣ + ص & ٢ \times ٣ = س + ١ \\ ٢ = ٣ + ص & ٦ = س + ١ \\ ٣ - ٢ = ص & ١ - ٦ = س \\ ١ = ص & ٥ = س \end{array}$$

أفكار هندسية

اثبات أن الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع.

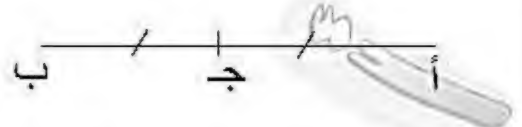
فكرة الحل : نثبت أن منتصف القطر أ ج = منتصف القطر ب د

مثال ٤: برهن أن الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع حيث أ (٣ ، ٥) ب (٦ ، ٢) ، ج (١ ، ١) د (٤ ، ٠)

الحل

$$\begin{aligned} \text{منتصف أ ج} &= \left(\frac{١-٣}{٢} ، \frac{١+٥}{٢} \right) = (١ ، ٣) \\ \text{منتصف ب د} &= \left(\frac{٤+٢}{٢} ، \frac{٠+٦}{٢} \right) = (٣ ، ٣) \end{aligned}$$

اذن : القطران ينصف كل منهما الآخر
اذن الشكل متوازي أضلاع



اذا كان أ (س ، ١) ، ب (٣ ، ص) ، ج منتصف أ ب فإن احداثي نقطة ج :

$$ج = \left(\frac{س+٣}{٢} ، \frac{١+ص}{٢} \right)$$

مثال ١: اذا كانت أ (٣ ، ٦) ، ب (١- ، ٢) أوجد منتصف أ ب

الحل : المنتصف = $\left(\frac{٣+١-}{٢} ، \frac{٦+٢}{٢} \right) = (١ ، ٤)$

مثال ٢: اذا كان أ ب قطرا في الدائرة م حيث أ (٤ ، ١-) ، ب (٢- ، ٧) أوجد احداثي مركز الدائرة م ثم احسب محيطها .

الحل : م = $\left(\frac{٧+١-}{٢} ، \frac{٢-٤}{٢} \right) = (٣ ، ١)$

أ م = نق

$$\sqrt{(٣-١-)^2 + (١-٤)^2} = ٥ = \text{وحدة طول}$$

المحيط = $٣,١٤ \times ٥ \times ٢ = ٣١,٤ = \text{وحدة طول}$

مثال ٧: اثبت أن النقاط أ (١-، ٤)، ب (٣، ١)، ج (٥-، ١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ثم أوجد مساحته.

الحل

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

٥ وحدة طول

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{0+64} = \sqrt{64} = 8$$

٨ وحدة طول

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

٥ وحدة طول

بم أن: $\overline{AB} = \overline{AC}$
اذن: المثلث متساوي الساقين قاعدته \overline{BC}

$$(D) \text{ منتصف } \overline{BC} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = (3, 0)$$

أد (الارتفاع)

$$\overline{AD} = \sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

٣ وحدة طول

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

١٢ وحدة مربعة

تدريب: أ ب ج د متوازي أضلاع فيه
أ (١، ٢)، ب (٣، ٨)، ج (٩، ١٠)، د (٧، ٥)
أوجد قيمة ص.

مثال ٥: أ ب ج د متوازي أضلاع
تقاطع قطراه في ه حيث أ (٣، ١)
ب (٦، ٢)، ج (١، ٧)
أوجد إحداثيي نقطتي ه، د

الحل

$$\text{ه منتصف } \overline{AC} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (2, 4)$$

بفرض د = (س، ص)

بم أن منتصف \overline{BD} = (٢، ٤)

$$(2, 4) = \left(\frac{1+س}{2}, \frac{7+ص}{2} \right)$$

$$2 = \frac{1+س}{2} \quad | \quad 4 = \frac{7+ص}{2}$$

$$2 \times 2 = 1 + س \quad | \quad 2 \times 4 = 7 + ص$$

$$4 = 1 + س \quad | \quad 8 = 7 + ص$$

$$4 - 1 = س \quad | \quad 8 - 7 = ص$$

$$3 = س \quad | \quad 1 = ص$$

$$D = (3, 1)$$

مثال ٦: إذا كانت النقطة ج (٦، -٤)

هي منتصف \overline{AB} حيث أ (٥، -٣)

أوجد إحداثيي نقطة ب.

الحل

بفرض أن ب = (س، ص)

$$(6, -4) = \left(\frac{5+س}{2}, \frac{-3+ص}{2} \right)$$

$$-4 = \frac{5+س}{2} \quad | \quad -6 = \frac{-3+ص}{2}$$

$$-8 = 5 + س \quad | \quad -12 = -3 + ص$$

$$-13 = س \quad | \quad -9 = ص$$

$$B = (-13, -9)$$

ميل الخط المستقيم

بدلالة
نقطتين

بدلالة معادلة
المستقيم

بدلالة \angle

ثالثاً: حساب الميل بدلالة نقطتين على

المستقيم:
الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

مثال ٣: ميل المستقيم المار بالنقطتين
(٣ ، ٢) ، (٥ ، ١) =

$$\text{الميل} = \frac{١-٢}{٥-٣} = \frac{٣}{٢}$$

مثال ٤: المستقيم المار بالنقطتين
(١- ، ١-) ، (٤ ، ٤) يصنع مع
الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها

$$\text{الحل: الميل} = \frac{١+٤}{١+٤} = ١$$

ظا هـ = الميل = ١
 $\angle = ٤٥^\circ = \tan^{-1} ١$
اذن قياس الزاوية = ٤٥

شوية ملاحظات

- ميل المستقيم الموازي لمحور السينات
(العمودي على الصادات) = صفر
- أي أن البسط = صفر
- ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات
(العمودي على السينات) غير معرف
- أي أن المقام = صفر

أولاً: حساب الميل بدلالة الزاوية التي
يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات (\angle) :

الميل = ظا هـ

مثال ١: ميل المستقيم الذي يصنع مع
الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها ٤٥ = ١

ثانياً: حساب الميل بدلالة معادلة
المستقيم:

١. المعادلة الغير مفصولة (كل المعادلة
في الطرف الأيمن بينما الطرف الأيسر
يساوي صفر) : أس + ب ص + ج = ٠

$$\text{الميل} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

مثال ٢: المستقيم الذي معادلته

$$٣س - ٥ص = ٤ \text{ ميله } = \dots\dots$$

الحل: نصفر المعادلة (نجعل الطرف
الأيسر صفر)

$$٠ = ٤ + ٥ص - ٣س$$

$$\text{الميل} = \frac{٣-}{٥-} = \frac{٣}{٥}$$

٢. اذا كانت المعادلة على الصورة

$$\text{العامة: ص} = \text{م س} + \text{ج}$$

$$\text{الميل} = \text{معامل س}$$

الفكرة الأولى: المستقيمان المتوازيان

متساويان في الميل.

مثال ٥: إذا كان المستقيمان

$$6x + 3y = 2 \text{ و } 3x + 3y = 0$$

متوازيين أوجد قيمة ك.

الحل: المستقيمان متوازيان.

$$\text{اذن } m_1 = m_2$$

$$\frac{3-}{1-} = \frac{6-}{ك}$$

اللي متوصل بـ ك نضعه في المقام

$$ك = \frac{1- \times 6-}{3-} = 2$$

مثال ٧: أوجد ميل المستقيم العمودي

على المستقيم المار بالنقطتين

$$(1, 5), (2, 3)$$

الحل:

$$\text{ميل المستقيم الأول} = \frac{2+1}{3-5} = \frac{3}{-2}$$

$$\text{ميل المستقيم المطلوب} = \frac{2-}{3-}$$

(نقلب ونغير الإشارة)

مثال ٨: إذا كان المستقيم

$$أس - ٢ ص + ٤ = ٠ \text{ عموديا على}$$

$$\text{المستقيم } ٢س - ٣ص + ٧ = ٠ \text{ أوجد}$$

قيمة أ.

$$\text{الحل: } m_1 = \frac{1-}{2-} = \frac{1}{3}$$

$$m_2 = \frac{2-}{3-} = \frac{2}{3}$$

المستقيمان متعامدان

$$\text{نقلب أحدهما ونغير الإشارة} \leftarrow \frac{3-}{1-}$$

$$\frac{1-}{3-} = \frac{3-}{1-}$$

اللي متوصل بـ أ نضعه في المقام

$$أ = \frac{2 \times 3-}{3-} = 2$$

الفكرة الثانية: المستقيمان المتعامدان

حاصل ضرب ميلهما = -١

إذا كان: $ل_1 \perp ل_2$

$$\text{وكان } m_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{فإن } m_2 = -3$$

نقلب ونغير الإشارة.

تدريب: إذا كان المستقيم ل يمر

بالنقطتين (١، ٣)، (٢، ك)

والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

٤٥° أوجد قيمة ك عندما يكون ل١، ل٢

١. متوازيين ٢. متعامدين

تطبيقات هندسية على الميل

مثال ٩ : باستخدام الميل اثبت أن

المثلث الذي رؤوسه س (٥ ، ٣)

ص (٤ ، ٢) ، ع (١ ، ٥) قائم الزاوية في ص ، ثم أوجد احداثي نقطة ل التي تجعل الشكل مستطيلا .

الحل : الفكرة : نثبت أن ضلعي القائمة

س ص ، ص ع متعامدان باستخدام الميل .

$$\text{ميل س ص} = \frac{3-5}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ميل ص ع} = \frac{2-3}{4-5} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$-1 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

وعندما يكون الشكل مستطيلا يكون القطران س ع ، ص ل ينصف كل منهما الاخر .

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{5}{2} \right) = (3, 2.5)$$

وبفرض نقطة ل (أ ، ب)

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{5+4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$(3, 2.5) = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{5+4}{2} \right)$$

$$3 = \frac{1+2}{2} \Rightarrow 6 = 1+2 \Rightarrow 5 = 2$$

$$2.5 = \frac{3+4}{2} \Rightarrow 5 = 3+4 \Rightarrow 1 = 4$$

$$2 = 4 \Rightarrow 2 = 4 \Rightarrow 2 = 4 \Rightarrow 2 = 4$$

$$(2, 6) = ل$$

مثال ١٠ : باستخدام الميل اثبت أن

النقط أ (٣ ، ١) ، ب (٥ ، ١)

ج (٦ ، ٤) ، د (٦ ، ٠) هي

رؤوس مستطيل .

$$\text{الحل :} \quad \text{ميل أ ب} = \frac{1-1}{5-3} = 0$$

$$\text{ميل ج د} = \frac{4-0}{6-6} = \frac{4}{0} = \infty$$

∴ أ ب ، ج د متوازيان

$$\text{ميل ب ج} = \frac{1-4}{5-6} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\text{ميل أ د} = \frac{1-0}{3-6} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

∴ أ ب ، ج د متوازيان

∴ كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

$$\text{ميل أ ب} \times \text{ميل ب ج} = 0 \times 3 = 0$$

$$\therefore \text{أ ب} \perp \text{ج د}$$

∴ الشكل أ ب ج د مستطيل

تدريب : اذا كان المثلث الذي رؤوسه

ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥)

ع (٥ ، ١) قائم الزاوية في ص .

أوجد قيمة أ .

الحل : ميلا ضلعا القائمة المتعامدان

$$\text{ميل س ص} = \frac{5-2}{3-4} = \frac{3}{-1} = -3$$

متعامدان : نقرب أحدهما ونغير الإشارة

$$\text{ميل ص ع} = \frac{1-2}{5-4} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2-1}{5-4} \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 1 = 3$$

مثال ١١: باستخدام الميل اثبت أن النقاط أ (١، ١) ، ب (٣، ٢) ، ج (١، ٠) تقع على استقامة واحدة.

الحل:
ميل أ ب = $\frac{2-1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

ميل ب ج = $\frac{3-2}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

ميل أ ب = ميل ب ج ويشتركان في ب
أ ، ب ، ج على استقامة واحدة.

معادلة الخط المستقيم

مثال ٢: مستقيم ميله $\frac{2}{3}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله وحدتان. أوجد معادلته ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات.

الحل: م : $\frac{2}{3}$ ، ج : ٢
المعادلة : ص = $\frac{2}{3}س + ٢$

نضع ص = ٠ $\leftarrow ٠ = \frac{2}{3}س + ٢$

$\frac{2}{3}س = -٢$

س = $-٢ \times \frac{3}{2} = -٣$

س = -٣ \leftarrow النقطة هي (-٣ ، ٠)

الفكرة الثانية: إيجاد المعادلة بدلالة

الميل ونقطة واقعة على المستقيم.

فكرة الحل: نضع الميل في المعادلة ثم

نعوض بالنقطة لإيجاد قيمة ج .

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

هي : ص = م س + ج

حيث م : ميل الخط المستقيم.

ج : الجزء المقطوع من محور الصادات.

الفكرة الأولى: إيجاد المعادلة بدلالة الميل والجزء المقطوع.

مثال ١: أوجد معادلة المستقيم الذي

ميله ٢ ويقطع من الاتجاه السالب

لمحور الصادات جزء مقداره

٣ وحدات.

الحل: م = ٢ ، ج = -٣

المعادلة هي : ص = ٢س - ٣

- معادلة المستقيم الموازي لمحور

السينات ويمر بالنقطة (٢ ، -٣)

هي : ص = -٣ .

- معادلة المستقيم الموازي لمحور

الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٧)

هي : س = ٢ .

- معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر

بنقطة الأصل هي : ص = م س .

مثال ٣: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°.

الحل: الميل = $\tan 45^\circ = 1$

المعادلة هي : $ص = م س + ج$
بينما $1 = م$

$ص = م س + ج$

لايجاد قيمة ج نعوض بالمعادلة عن النقطة (٣ ، ٢) حيث $س = ٣$ ، $ص = ٢$

$$٢ = ٣ + ج$$

$$ج = ٢ - ٣$$

$$ج = ١ -$$

المعادلة هي : $ص = س - ١$

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وعموديا على المستقيم الذي معادلته

$$٥س - ٢ص + ٧ = ٠$$

الحل: ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$$\frac{٥}{٢} = \frac{٠ - ٧}{٢ - ٤} =$$

ميل المستقيم المطلوب نقلب ونغير

$$\frac{٢ - ٥}{٠} = \text{الاشارة}$$

..... أكمل الحل

الفكرة الثالثة: ايجاد المعادلة بدلالة

نقطتين على المستقيم.

فكرة الحل : - نحسب الميل من القانون

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

- نعوض بنقطة من الاثنين لإيجاد قيمة ج .

مثال ٥: أوجد معادلة المستقيم المار

بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (٠ ، ٥)

الحل

$$م = \frac{٣ - ٥}{٤ - ٠} = \frac{١ - ٣}{٢} =$$

المعادلة : $ص = \frac{١}{٣} س + ج$

بالتعويض بالنقطة (٠ ، ٥)

$$٥ = ٠ + ج$$

$$ج = ٥$$

المعادلة هي : $ص = \frac{١}{٣} س + ٥$

مثال ٤: أوجد معادلة المستقيم المار

بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازي المستقيم

$$س + ٢ص - ٧ = ٠$$

الحل: ميل المستقيم المعطى

$$= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١ - ٢}{٣} =$$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١ - ٢}{٣}$

المعادلة هي : $ص = \frac{١ - ٢}{٣} س + ج$

بالتعويض بالنقطة (٣ ، ٥)

$$٥ = ٣ \times \frac{١ - ٢}{٣} + ج$$

$$٥ = \frac{٣ - ٢}{٣} + ج$$

$$ج = \frac{٧ - ٢}{٣} =$$

المعادلة هي : $ص = \frac{١ - ٢}{٣} س + \frac{٧ - ٢}{٣}$

تدريب: أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي جزءين موجبين ٤ ، ٩ وحدة طول على الترتيب.

مساعدة : المستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٩ ، ٠)

..... أكمل الحل

أكمل: المستقيم الذي معادلته
٢س - ٣ص = ٦ يقطع من محور
الصادات جزءا طوله
الجواب: وحدتان

مثال ٧: أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم

الذي معادلته : $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل : بضرب المعادلة $\times ٣$

$$\frac{٣}{٣} س + \frac{٣}{٣} ص = ٣$$

$$ص = ٣ - \frac{٣}{٣} س$$

$$\text{الميل} = -\frac{٣}{٣}$$

المستقيم يقطع من محور الصادات
جزءا موجبا مقداره ٣ وحدات

مثال ٦: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ٣) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣- ، ٤) ، (٣ ، ٢-)
الحل :

$$\text{ميل المستقيم المعطى} = \frac{٢-٤}{٣-٣-} = ١-$$

ميل المستقيم المطلوب نقاب ونغير
الإشارة = ١

$$\text{المعادلة : } ص = م س + ج$$

$$١ = م$$

$$\text{المعادلة : } ص = س + ج$$

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٣) لإيجاد
قيمة ج

$$٣ = ١ + ج$$

$$ج = ٣ - ١$$

$$ج = ٢$$

$$\text{المعادلة هي : } ص = س + ٢$$

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار
بالنقطة (١ ، ٦) ومنتصف أ ب
حيث أ (١ ، ٢-) ، ب (٣ ، ٤-)

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار
بالنقطتين (١ ، ٣) ، (١- ، ٣-)
ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

ذاكر.....

اجتهد.....

اطلب التوفيق من الله.....

أسألكم الدعاء لوالدي بالرحمة والمغفرة

أ.محمود عزمي

ملوي المنيا

٠١٠٠٤٢٧٣٣٩٥

